II. Határozott integrál. Az alábbi (I_1, I_2, I_3) számok értéke egy-egy pozitív egész szám. Mik ezek a számok konkrétan? *(3×5 p.)*

1. $I_1 = \int_0^{\ln 10} e^x \sqrt{e^x - 1}\, dx$ (Útmutatás: célszerű a $t = e^x$ helyettesítés.)

$$I_1 \overset{=}{\uparrow} \int_1^{10} t\sqrt{t-1}\,\frac{dt}{t} = \left[\frac{2}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}}\right]_{t=1}^{10} = \frac{2}{3}\cdot 9^{\frac{3}{2}} = 18$$

$x = \ln t$

$dx = \frac{dt}{t}$

$(\cos^2 x)' = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$

2. $I_2 = 36 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\cos^2(x)\, dx \overset{\downarrow}{=} 36\cdot\left[\frac{-1}{2}\cos^4 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 18$

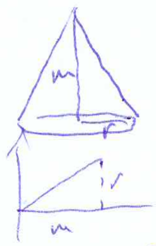
3. $I_3 = \frac{48\ln 2}{7} \int_0^1 4^{3x-1}\, dx = \frac{48\ln 2}{7}\left[\frac{4^{3x-1}}{3\ln 4}\right]_0^1 = \frac{48\ln 2}{7}\cdot\frac{16-\frac{1}{4}}{6\ln 2} =$

$= \frac{8}{7}\left(16 - \frac{1}{4}\right) = \frac{8}{7}\,\frac{63}{4} = 18$

(2×5 p.) **III. Határozott integrál alkalmazásai.**

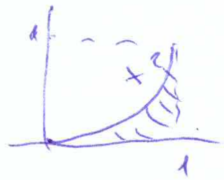
1. Igazolja, hogy az $m \in \mathbb{R}^+$ magasságú, $r \in \mathbb{R}^+$ alapkör sugarú egyenes kúp térfogata $V = \dfrac{mr^2\pi}{3}$. (Útmutatás: az origón átmenő egyenest az x tengely körül megforgatva kúpot kapunk,mely térfogata meghatározható integrállal.)

$$V = \pi \int_0^m f^2 = \pi \int_0^m \left(\frac{r}{m}x\right)^2 dx = \pi \frac{r^2}{m^2} \cdot \frac{m^3}{3} = \frac{1}{3} m r^2 \pi$$



$f(x) = \frac{r}{m}x$

2. Határozza meg a $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$ alakzat súlypontját.



$$|T| = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$S_x = \frac{1}{|T|} \int_0^1 x \cdot x^2 dx = 3 \cdot \frac{1}{4}$$

$$S_y = \frac{1}{|T|} \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2)^2 dx = \frac{3}{10}$$

(Az f és g közti alakzat súlypontja:

$$S_x = \frac{\int_a^b x(g(x) - f(x))dx}{\int_a^b (g-f)}, \quad S_y = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (g^2 - f^2)}{\int_a^b (g-f)}$$

)

IV. Improprius integrál. Döntse el, hogy az alábbi improprius integrálok konvergensek-e, és ha igen, számolja ki értéküket. *(3×3 p.)*

1. $L_1 = \int_1^\infty \frac{e^x}{x^2}\, dx$ divergens, mert $\frac{e^x}{x^2} \to \infty$, ha $x \to \infty$

2. $L_2 = \int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{1+x}\, dx$ divergens, mert $\frac{\operatorname{arctg} x^2}{1+x} \geq \frac{\operatorname{arctg} 1}{1+x} = \frac{\frac{\pi}{4}}{1+x}$

és $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x} = \left[\ln(1+x)\right]_1^\infty = \infty$

3. $L_3 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} =$

$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\arcsin(2x-1)\right]_{0+0}^{1-0} = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \pi$

(5×10 p.) **V. Vegyes feladatok.**

1. Számolja ki a $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$ határértéket.

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} = \frac{2}{\sqrt{1+0}+1} = 1$$

2. Írja fel az arcsin függvény 0 pont körüli, másodfokú Taylor-polinomját.

$f(x) = \arcsin x$, $f(0)=0$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $f'(0)=1$, $f''(x) = -\frac{1}{2}\cdot(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x)$

$f''(x) = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$, $f''(0)=0$

$$T_2(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2 = x$$

3. Legyen $x_0 = 1$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $x_{n+1} = \sqrt{6x_n+16}$. Konvergens-e az x_n sorozat? Ha igen, határozza meg a határértékét.

$x_n \geq 4$ $(n \geq 1)$ teljes indukcióval világos

Az $\{x_n\}$ monoton nő: $x_0 < x_1$ ✓

$x_{n-1} < x_n \Rightarrow 6x_{n-1}+16 < 6x_n+16$, párhuzal $\Rightarrow x_n = \sqrt{6x_{n-1}+16} <$

$< \sqrt{6x_n+16} = x_{n+1}$

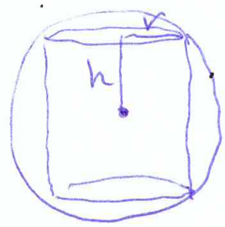
$x_n < 8$: $n=0$ ✓, ha $x_n < 8$, akkor $0 < 6x_n+16 < 64 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{n+1} = \sqrt{6x_n+16} < 8$

Tehát $\{x_n\}$ monoton nő és korlátos $\Rightarrow \exists\, A = \lim x_n$ véges határérték és $A > 4$

$A = \sqrt{6A+16}$, $0 = A^2-6A-16 = (A-8)(A+2) \Rightarrow A = 8$

4. Egy egységnyi sugarú gömbbe legfeljebb mekkora térfogatú hengert lehet beletenni?



$r^2 + h^2 = 1$

$V = 2h \cdot r^2 \pi = 2\pi h (1-h^2)$

$V' = 2\pi(1-3h^2) \Rightarrow V$ nő, amíg $h < \frac{1}{\sqrt{3}}$, utána csökken

$\Rightarrow h = \frac{1}{\sqrt{3}}$-ra lesz maximális térfogat,

$V_{max} = 2\pi \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$

5. Egyenletesen folytonos-e az ln függvény a $]1, \infty[$ halmazon?

Igen, mert diffható $[1, \infty)$-en és deriváltja $\left|\frac{1}{x}\right| \leq 1$ korlátos